SUITES NUMÉRIQUES

- **Exercice 01 :**

On considère la suite (U_n) définie par $U_0 = 1$ et $U_{n+1} = 2U_n + an + b$.

1) Soit $V_n = \frac{1}{3}U_n + n$. Déterminer a et b pour que (V_n) soit une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
2) a) Ecrire U_n et V_n en fonction de *n*.
   b) Calculer la limite de V_n.
3) Calculer $S_n = \sum_{i=0}^{n} V_i = V_0 + V_1 + \cdots + V_n$ puis $S'_n = \sum_{i=0}^{n} U_i = U_0 + U_1 + \cdots + U_n$.

- **Exercice 02 :**

Soit (U_n) et (V_n) les suites définies par : $\begin{cases} U_0 = 6 \\ U_{n+1} = \frac{1}{5}U_n + \frac{4}{5}, \end{cases}$ *et* $V_n = U_n - 1$

1) Calculer $U_1,\ U_2,\ U_3,\ V_1,\ V_2,\ V_3$.
2) Montrer que la suite (V_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
3) Calculer $\lim_{n\to+\infty} V_n$ et $\lim_{n\to+\infty} U_n$.
4) Exprimer $S_n = V_0 + V_1 + V_2 + V_3 + \cdots + V_n$ et $S'_n = U_0 + U_1 + U_2 + U_3 + \cdots + U_n$ en fonction de *n*.

- **Exercice 03:**

1) Soit (w_n) la suite définie par : $\begin{cases} w_0 = 1 \\ w_{n+1} = \frac{w_n + 1}{w_n + 3}, \end{cases}$
   a) Montrer par récurrence que : pour tout $n \in \mathbb{N},\ 0 \leq w_n \leq 1$.
   b) Démontrer que (w_n) est décroissante.
   c) En déduire que la suite (w_n) converge puis déterminer sa limite.
2) Soient (u_n) et (v_n) les suites définies par $u_0 = \frac{5}{2}$ et pour tout entier naturel :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n - n - \frac{4}{3} \\ v_n = u_n + \frac{3}{2}n - \frac{1}{4} \end{cases}$$

   a) Calculer $u_1,\ u_2,\ v_0,\ v_1, v_2$.
   b) Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
   c) Exprimer v_n en fonction de *n*.
   d) Exprimer $S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_{n-1}$ en fonction de *n*.
   e) Calculer $\lim_{n\to+\infty} S_n$.

- **Exercice 04 :**

A. Soit (u_n) la suite réelle définie par U_0 fixé et pour tout $n \in \mathbb{N}$ $U_n = 1,05U_{n-1} + 1000$ et (V_n) la suite définie par $V_n = U_n + 20000$.

1) Démontrer que (V_n) est une suite géométrique.

SUITES NUMÉRIQUES

2) Calculer V_n en fonction de V_0 et n. En déduire U_n en fonction de U_0 et n .

B. En Juillet 2012 la population électorale d'une commune était de 20.000 électeurs. Chaque année cette population électorale augmente de 5% et de plus, 1000 électeurs supplémentaires viennent s'y établir définitivement.

1) Préciser la population électorale en Juillet 2019 dans cette commune.
2) Etant donné que le taux d'abstention est de 20%, déterminer le nombre de votants dans cette commune en 2019.

- **Exercice 05 :** Soit (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{3}{5}u_n + 1 \end{cases}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

1) A l'aide d'un graphique, représenter les premiers termes de la suite(u_n) sur l'axe des abscisses et émettre une conjecture sur la limite éventuelle de la suite (u_n).

2) a) Déterminer un réel a tel que la suite de terme général $v_n = u_n - a$ soit une suite géométrique.

   b) Exprimer v_n, puis u_n en fonction de n.

   c) Démontrer que la suite (u_n) est convergente et préciser sa limite.

3) Soit (S_n) la suite définie par : $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$

   a) Exprimer S_n en fonction de n.

   b) Etudier la convergence de la suite (S_n) .

- **Exercice 06 :**

1) x, y et z sont, dans cet ordre, trois termes consécutifs d'une suite arithmétique. Calculer ces trois nombres, sachant que leur somme est 9 et la somme de leur carrée et 59.
2) a, b et c sont, dans cet ordre, trois termes consécutifs d'une suite géométrique croissante. Calculer ces trois nombres sachant que leur somme est 63 et la somme de leurs inverses est $\frac{7}{16}$.

- **Exercice 07 :**

1) Soit (u_n) une suite arithmétique de raison $r = 3$ et de premier terme u_1, telle que $u_{15} = 137$. Calculer u_1 et $S_{15} = \sum_{i=1}^{15} u_i$.
2) Soit (v_n) une suite arithmétique de raison r' et de premier terme v_0, telle que $v_{19} = 39$ et $S_{19} = \sum_{i=0}^{19} v_i = 400$. Calculer v_0 et r'.
3) Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système suivant où a, b et c sont en progression géométrique dans cet ordre.

$$\begin{cases} a + b + c = 14 \\ \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{7}{8} \end{cases}$$

SUITES NUMÉRIQUES

- **Exercice 08 :**

1) Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+2}}$

   a) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution α sur $[0; +\infty[$ et que $0{,}6 < \alpha < 0{,}7$.

   b) Montrer que $\forall\, x \in [0; 1],\ \ |f'(x)| \leq \dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

2) Soit (u_n) la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

   a) Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \ 0 \leq u_n \leq 1$.

   b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N},\ \ |u_{n+1} - \alpha| \leq \dfrac{\sqrt{2}}{4}|u_n - \alpha|$

   c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N},\ \ |u_n - \alpha| \leq \left(\dfrac{\sqrt{2}}{4}\right)^n |u_0 - \alpha|$

   d) En déduire que la suite (u_n) converge puis déterminer sa limite.

   e) Montrer que $\alpha = \sqrt{\sqrt{2} - 1}$.

- **Exercice 09 :**

Soit f la fonction définie sur $[-1; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{\dfrac{1+x}{2}}$.

1) Etudier les variations de f.

2) Soit (u_n) la suite définie par $\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

   a) Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \ 0 < u_n < u_{n+1} < 1$.
   b) En déduire que la suite (u_n) est convergente puis déterminer sa limite.
   c) Montrer que pour tout $x \in \left[-\dfrac{1}{2}; +\infty\right[,\ \ |f'(x)| \leq \dfrac{1}{2}$.
   d) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $|u_{n+1} - 1| \leq \dfrac{1}{2}|u_n - 1|$.
   e) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $|u_n - 1| \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^n |u_0 - 1|$.
   f) Retrouver la limite de la suite (u_n)

- **Exercice 10 :**

On considère la suite (U_n) définie par : $\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \frac{2U_n + 3}{U_n + 4} \end{cases}$.

1. Montrer par récurrence que :
  a. $\forall n \geq 1, 0 < U_n < 1$.

SUITES NUMÉRIQUES

b. (U_n) est croissante.

2. Soit (V_n) la suite définie par : $V_n = \dfrac{U_n - 1}{U_n + 3}$.

a. Montrer que (V_n) est une suite géométrique ; préciser la raison et le premier terme.

b. En déduire l'expression de V_n puis celle de U_n en fonction de n.

c. Calculer $S_n = V_0 + V_1 + V_2 + \cdots\cdots + V_n$.

d. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

- **Exercice 11 :**

Soit $(U_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par : $\begin{cases} U_1 \in \mathbb{R} \\ U_{n+1} = \frac{6 + U_n}{2 + U_n} \end{cases}$.

1. Montrer qu'il existe deux valeurs a et b de U_1 $(a < b)$, pour lesquelles la suite est constante.

2. Montrer que si $U_1 \neq a$ et $U_1 \neq b$, il en est de même pour U_n ; exprimer alors $\dfrac{U_{n+1} - a}{U_{n+1} - b}$ en fonction de $\dfrac{U_n - a}{U_n - b}$.

3. En déduire que la suite (V_n) définie par : $V_n = \dfrac{U_n - a}{U_n - b}$ est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n$

- **Exercice 12 :**

Soient θ un réel tel que :$0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2}$ et (U_n) la suite définie par : $\begin{cases} U_0 = 2cos\theta \\ U_{n+1} = \sqrt{2 + U_n} \text{ , } \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1. Calculer les trois premiers termes de la suite en fonction de θ.
(On rappelle que$\forall\ x \in \mathbb{R},\ \ cos 2x = 2cos^2 x - 1$).

2. Montrer par récurrence, $\forall n \in \mathbb{N},\ \ U_n = 2cos\left(\dfrac{\theta}{2^n}\right)$.

3. Soit (V_n) la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ \ V_n = \dfrac{\theta}{2^n}$. Déterminer la limite de la suite (V_n).

4. En déduire que la suite (U_n) est convergente ; quelle est sa limite?

- **Exercice 13 :**

Soit $a \in \mathbb{R}$ et (U_n), la suite définie par : $\begin{cases} U_0 = 0,\ U_1 = 1 \\ U_{n+1} = aU_n + (1 - a)U_{n-1} \end{cases}$.

Soit (V_n) la suite définie par : $V_n = U_{n+1} - U_n$.

1. Montrer que (V_n) est une suite géométrique.

2. Exprimer V_n en fonction de n et a.

3. En déduire l'expression de U_n en fonction de n et a.

4. Comment choisir a pour que (U_n) soit convergente? Quelle est alors sa limite?